

Correction Feuille Exercice 20

✍ Déterminer une loi de probabilité discrète

Exercice 16 (*)

On note X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

1. On calcule la somme partielle

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(X = k) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît en effet une somme télescopique. La série $\sum_{n \geq 1} P(X = n)$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1.$$

2. On regarde la série $\sum_{n \geq 1} P(X = n)$ en passant par les sommes partielles

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2} - \frac{k}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{(k+1-1)}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est convergente (série de Riemann) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc l'espérance de X existe et vaut

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 17 ()**

Un sauteur essaye successivement les hauteurs $1, 2, \dots, n, \dots$ jusqu'à ce qu'il échoue. Il a une probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir son saut à la hauteur n . Soit X la hauteur du dernier saut réussi. (Il finit toujours par échouer et les sauts sont indépendants).

1. On a

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

On note les évènements A_n : "Le sauteur réussit son saut à la hauteur n . On a donc $P(A_n) = \frac{1}{n}$.

On a alors

$$(X = k) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$$

Les évènements étant mutuellement indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_k) \times P(\overline{A_{k+1}}) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

On étudie les sommes

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P(X = k) &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique. On peut donc conclure que la série converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \frac{1}{1!} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 1.$$

2. On étudie la série $\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$ en passant par les sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n k \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n k \frac{(k+1-1)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} - \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Or, on sait que les séries $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ (série exponentielle) et $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+1)!}$ sont convergentes. L'espérance existe et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = e - 1$$

On va calculer $E((X+1)(X-1))$ en utilisant la formule de transfert

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)(k-1)P(X=k) &= \sum_{k=1}^n (k-1)(k+1) \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{(k-1)k(k+1)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

La série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ est convergente et donc

$$E((X-1)(X+1)) = E(X^2 - 1) = e \iff E(X^2) = e + 1$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e + 1 - (e - 1)^2 = 3e - e^2.$$

🌀 **Remarque :** Le calcul de $E((X+1)(X-1))$ est assez astucieux mais permet d'éviter des calculs trop compliqués de sommes. Ces calculs peuvent vous être proposés avec des indications. Il faut savoir comment calculer rapidement la variance en utilisant les formules du cours.

🍂 Calculer l'espérance et la variance

Exercice 18 ()

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance m et de variance σ^2 .

$$E(2X) = 2E(X) = 2m.$$

On a

$$E((X-3)^2) = E(X^2 - 6X + 9) = E(X^2) - 6E(X) + 9.$$

Or $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \iff E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + m^2$. On a alors

$$E((X-3)^2) = \sigma^2 + m^2 - 6m + 9.$$

$$V(5X) = 25V(X) = 25\sigma^2.$$

$$V(3X+1) = 9V(X) = 9\sigma^2.$$

Exercice 19 ()**

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche. Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. On note les évènements A_k : "On tire une boule blanche au k -ième tirage". On a alors 2 cas. On a alors

$$(X = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

On remarque que si $k \geq n$,

$$P(X = k) = 0$$

(On a alors épuisé toutes les boules rouges et on a donc déjà tiré une boule blanche). Désormais, si $k < n$, on a, d'après la formule des probabilités composées (les évènements ne sont clairement pas indépendants),

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \times \dots \times P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}}(\overline{A_k}) \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \dots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1} \end{aligned}$$

Après simplification,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad P(X = k) = 2 \times \frac{(n-k)}{n(n-1)}}$$

On calcule l'espérance (qui existe car la somme est finie)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} 2k \frac{(n-k)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \\ &= \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{2}{n-1} \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= n - \frac{1}{3}(2n-1) \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient

$$\boxed{E(X) = \frac{n+1}{3}}$$

2. Si on tire la boule blanche au k -ième lancer, il reste $n - k - 1$ boules rouges dans l'urne.

$$\boxed{\text{On a donc } Y = n - 1 - X.}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors } E(Y) = E(n - 1 - X) = n - 1 - \left(\frac{n+1}{3}\right) = \frac{2}{3}n - \frac{4}{3}.}$$

 *Loi géométrique et loi de Poisson*

Exercice 20

Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0; 1[$. On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. On cherche le premier succès dans une répétition d'expérience de Bernoulli. X_1 suit une loi géométrique de paramètre p .

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \quad E(X_1) = \frac{1}{p}, \quad V(X_1) = \frac{1-p}{p^2}$$

2. Le support de X_2 est $X_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $n \in X_2(\Omega)$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P_{X_1=k}(X_2 = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k) P_{X_1=k}(X_2 = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} p \times q^{n-1-k} p \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q^{n-2} p^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \geq 2, \quad P(X_2 = n) = (n-1)q^{n-2}p^2.$$

On s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 2} nP(X_2 = n) = \sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}p^2$. Soit $N \geq 2$, on s'intéresse aux sommes partielles

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N n(n-1)q^{n-2}p^2 &= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^N n(n-1)q^{n-1}p \\ &= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^N n(n-1)P(X_1 = n) \end{aligned}$$

Comme X_1 admet un moment d'ordre 2, grâce au théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(X_1 = n) &= E(X_1(X_1 - 1)) \\ &= E(X_1^2) - E(X_1) \\ &= V(X_1) + E(X_1)^2 - E(X_1) \\ &= \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\ &= \frac{2-2p}{p^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } E(X_2) = 2\frac{p}{q} \left(\frac{1-p}{p^2} \right) = \frac{2}{p} = 2E(X_1).$$

Exercice 21 (*)

Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre N de voitures arrivant au péage en une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les conducteurs choisissent leur file au hasard, indépendamment les uns des autres. On note X_1 le nombre de voitures arrivant au guichet 1 en une heure.

1. N suit une loi de Poisson de paramètre λ donc

$$E(N) = \lambda.$$

Le paramètre λ correspond à la moyenne des voitures arrivant au péage en une heure.

2. Une voiture arrivant au péage va au guichet 1 avec une probabilité de $\frac{1}{10}$.
3. Sachant $N = n$, la VA X_1 suit une loi binomiale puisque l'on compte le nombre de succès d'une répétition d'épreuve de Bernoulli. On a donc

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_{(N=n)}(X_1 = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

Nous avons enfin,

$$\forall k > n, P_{(N=n)}(X_1 = k) = 0$$

4. En utilisant le système complet d'évènement associé à N et la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(X_1 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) \times P_{N=n}(X_1 = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{10}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{10}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{10}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!} \times \left(\frac{9}{10}\right)^n \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \left(\frac{1}{10}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{9}{10} \lambda\right)^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \left(\frac{1}{10}\right)^k e^{\frac{9\lambda}{10}} \end{aligned}$$

C'est à dire ,

$$P(X_1 = k) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{10}} \left(\frac{\lambda}{10}\right)^k}{k!}$$

5. La variable aléatoire X_1 suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{10}$.

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{10}\right)$$

On en déduit que

$$E(X_1) = \frac{\lambda}{10} \text{ et } V(X_1) = \frac{\lambda}{10}$$

Exercice 22 (*)

Une usine produit tous les jours 100 000 bouteilles plastiques. Environ 1 % des bouteilles sont défectueuses. 1000 bouteilles doivent être livrées à un client. On considère que ce prélèvement dans le stock général est infime et donc que les événements étudiés sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bouteilles défectueuses dans le lot livré au client

1. (a) X suit une loi binomiale de paramètre 1000 et $\frac{1}{100}$, c'est-à-dire

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(1000, 1/100).$$

- (b) On a

$$P(X = 5) = \binom{1000}{5} \left(\frac{1}{100}\right)^5 \left(\frac{99}{100}\right)^{995} \approx 0,037$$

Le calcul est en réalité très difficile puisque

$$\binom{1000}{5} = 8250291250200$$

- (c) De la même façon,

$$P(X \leq 3) = \left(\frac{99}{100}\right)^{1000} + \binom{1000}{1} \left(\frac{1}{100}\right)^1 \left(\frac{99}{100}\right)^{999} + \binom{1000}{2} \left(\frac{1}{100}\right)^2 \left(\frac{99}{100}\right)^{998} + \binom{1000}{3} \left(\frac{1}{100}\right)^3 \left(\frac{99}{100}\right)^{997}$$

$$P(X \leq 3) \approx 0,01$$

2. Afin de simplifier les calculs, on décide d'approcher cette loi par une loi de Poisson

- (a) Le paramètre de la loi de Poisson est

$$\lambda = E(X) = 10$$

- (b) On a alors

$$P(X = 5) = e^{-10} \frac{10^5}{5!} \approx 0,038$$

- (c) De la même façon,

$$P(X \leq 3) = e^{-10} \left(1 + 10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{3!}\right) \approx 0,01.$$

Exercice 23 ()**

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$: On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B : On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que A donne "pile" est a ; et que la probabilité que B donne "pile" est b : Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que A donne "face" pour la première fois et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que B donne "face" pour la première fois.

1. On cherche le premier succès d'une expérience de Bernoulli qui se répète de façon indépendante. X suit donc une loi géométrique de paramètre a . De la même façon, Y suit une loi géométrique de paramètre b .

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - a), \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - b), \quad E(X) = \frac{1}{1 - a}.$$

2. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned}
 P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1}(1-a)b^{k-1}(1-b) \\
 &= (1-a)(1-b) \sum_{k=1}^{+\infty} (ab)^{k-1} \\
 &= \frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}
 \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
 P(X > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X = j) \\
 &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} a^{j-1}(1-a) \\
 &= (1-a) \sum_{j=k+1}^{+\infty} a^{j-1} \\
 &= (1-a) \sum_{j=0}^{+\infty} a^{j+k} \quad (\text{changement d'indice}) \\
 &= (1-a)a^k \sum_{j=0}^{+\infty} a^j \\
 &= (1-a) \frac{a^k}{1-a} \\
 &= a^k
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 P(X > Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((Y = k) \cap (Y > k)) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} b^{k-1}(1-b)a^k \\
 &= (1-b)a \sum_{k=1}^{+\infty} (ab)^{k-1} \\
 &= (1-b)a \sum_{k=0}^{+\infty} (ab)^k \quad (\text{changement d'indice}) \\
 &= \frac{(1-b)a}{1-ab}
 \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}P(X < Y) &= 1 - P(X > Y) - P(X = Y) \\&= 1 - \frac{(1-b)a}{1-ab} - \frac{(1-a)(1-b)}{1-ab} \\&= \frac{1-ab-a+ab-(1-a)(1-b)}{1-ab} \\&= \frac{(1-a)-(1-a)(1-b)}{1-ab} \\&= \frac{(1-a)b}{1-ab}\end{aligned}$$

Exercices d'approfondissement

Exercice 24 (*)

Une piste rectiligne infinie est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, 3, \dots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. On suppose qu'elle a la même probabilité de sauter de une ou de deux cases à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts

1. On répète n fois une expérience de Bernoulli de probabilité de succès $\frac{1}{2}$. Y_n suit donc une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right), \quad E(Y_n) = \frac{n}{2}, \quad V(Y_n) = \frac{n}{4}.$$

2. (a) La puce a sauté Y_n fois une case et $n - Y_n$ fois deux cases. On a donc

$$X_n = Y_n + 2 \times (n - Y_n) = 2n - Y_n.$$

- (b) On en déduit donc,

$$E(X_n) = 2n - E(Y_n) = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3}{2}n.$$

et

$$V(X_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}.$$

Pour déterminer la loi de X_n , on détermine son support $X_n(\Omega) = \llbracket n, 2n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(2n - Y_n = k) \\ &= P(Y_n = 2n - k) \quad (\text{On a bien } 2n - k \in \llbracket 0, n \rrbracket) \\ &= \binom{n}{2n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - (2n - k)} \\ &= \binom{n}{2n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Exercice 25 (**)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue dans cette urne des tirages successifs, au hasard. A chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne en ajoutant en plus une boule de la même couleur que celle qui vient d'être tirée. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages. On note aussi B_n (respectivement R_n) l'évènement : on tire une boule blanche (respectivement rouge) au n -ième tirage*

1. On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

$$X_1 \text{ suit donc une loi uniforme sur } \llbracket 0, 1 \rrbracket, \quad X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 1 \rrbracket).$$

On a $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènement associé à X_1 . Ainsi

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 0 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On aurait pu également utiliser les évènements définis dans l'énoncé.

$$P(X_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{3}.$$

On a ensuite

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0)$$

2. On va montrer par récurrence $\mathcal{P}_n : \{ X_n \text{ suit une loi uniforme sur } \llbracket 0, n \rrbracket \}$

— **Initialisation** : On remarque que la X_1 et X_2 suivent bien une loi uniforme respectivement sur $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ et sur $\llbracket 0, 2 \rrbracket$.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang n . On sait alors que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$. Ainsi les évènements $(X_n = k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ forment un système complet d'évènement. On a ainsi pour tout $j \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, la formule des probabilités totales

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{k=0}^n P(X_n = k) P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = j)$$

🌀 **Remarque** : On écrit la formule des probabilité totale mais en réalité, la plupart des probabilités conditionnelles sont nulles.

— Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$P_{(X_n=j-1)}(X_{n+1} = j) = \frac{j}{n+2}$$

(En effet, $X_n = j - 1$ signifie que l'on a tiré $j - 1$ boules blanches sur les n premiers tirages. L'urne contient alors j boules blanches et $n + 2$ boules au total.) et

$$P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = j) = \frac{n+1-j}{n+2}$$

(En effet, $X_n = j$ signifie que l'on a tiré j boules blanches sur les n premiers tirages. L'urne contient alors $n + 2 - (j + 1)$ boules rouges et $n + 2$ boules au total.) Pour toute autre valeur de k , on a

$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = j) = 0$$

On a donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(X_{n+1} = j) = \frac{1}{n+1} \times \frac{j}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1-j}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

— Pour $j = 0$, la seule possibilité pour avoir l'évènement $X_{n+1} = 0$, c'est de n'avoir tiré aucune boule blanche.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_n = 0) \times P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

— Pour $j = n + 1$, la seule possibilité pour avoir l'évènement $X_{n+1} = n + 1$, c'est de n'avoir tiré que des boules blanches.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = n + 1) &= P(X_n = n \cap X_{n+1} = n + 1) \\ &= P(X_n = n) \times P_{(X_n=n)}(X_{n+1} = n + 1) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi X_{n+1} suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, n + 2 \rrbracket$